Bemerkungen zur Holomorphentheorie der Ringe

Von G. POLLÁK in Szeged

Den Begriff des Ringholomorphs hat RÉDEI in [2] eingeführt. Es stellte sich heraus, daß im Gegensatz zum analogen gruppentheoretischen Begriff, ein Ring im allgemeinen mehrere Holomorphe hat. Deshalb hat die Frage der Aufstellung der Bedingungen, unter denen ein Ring nur ein Holomorph hat, eine zentrale Bedeutung bekommen. Mit dieser Frage haben sich der Reihe nach RÉDEI [2], SZENDREI [3], LEEUWEN [1] und neulichst WEINERT und EILHAUER [4] beschäftigt.

Zur Zeit sind die folgenden hinreichenden Bedingungen für die Einzigkeit des Holomorphs eines Ringes R bekannt [1]) (N bezeichnet den Annullator von R, $\mathscr{E}(G)$ den Endomorphismenring der abelschen Gruppe G):

I. $R=R^2$ (LEEUWEN [1]),
II. $N=0$ (WEINERT—EILHAUER [4]),
III. $R=R^2+N$ und $\mathscr{E}(N^+)$ ist kommutativ (WEINERT—EILHAUER [4]) und die triviale Bedingung
IV. $\mathscr{E}(R^+)$ ist kommutativ.

Alle übrigen, bisher erhaltenen Bedingungen folgen aus den obigen.

1. Wir werden einen Satz beweisen, der die angeführten Resultate (außer IV) zur Folge hat. Dieser lautet:

Hat der Ring R einen charakteristischen Unterring R', der ein einziges Holomorph hat, und ist dabei jeder Homomorphismus von R/R' in N dem Zerohomomorphismus gleich,[2]) so hat auch R ein einziges Holomorph.

Dem Beweis schicken wir zwei Bemerkungen voraus:

1°) Ist ν ein Homomorphismus von R in N, so ist die durch

$$(1) \qquad \nu^* a = a\nu^* = \nu a \qquad (a \in R)$$

definierte Doppelabbildung ν^* ein Doppelhomothetismus. In der Tat, ν^* ist linear und für $a, b \in R$ gelten

$$(a\nu^*)b = (\nu a)b = 0 = a(\nu b) = a(\nu^* b), \quad (\nu^* a)\nu^* = \nu^*(a\nu^*),$$

und, da $R^2 \subseteqq \operatorname{Ker} \nu$ bestehen muß, gilt auch

$$\nu^*(ab) = 0 = (\nu^* a)b, \quad (ab)\nu^* = 0 = a(b\nu^*).$$

1) Die unten vorkommenden Begriffe sind u. a. in [2] zu finden.

2) Obige Bedingung läßt sich als $\operatorname{Hom}(R^+/(R', R^2)^+, N^+) = 0$ schreiben.

2°. Sind α, β Doppelhomothetismen von R, so ist die durch

$$va = (\alpha a)\beta - \alpha(a\beta) \tag{2}$$

definierte Abbildung ν ein Homomorphismus von R in N. In der Tat, ν ist offensichtlich linear. Ferner gilt für beliebige $a, b \in R$

$$(\nu a)b = [(\alpha a)\beta - \alpha(a\beta)]b = [(\alpha a)\beta]b - [\alpha(a\beta)]b = (\alpha a)(\beta b) - \alpha[(a\beta)b] =$$
$$= (\alpha a)(\beta b) - \alpha[a(\beta b)] = 0,$$

d. h. $\nu a \in N$. Ebenso haben wir

$$\nu(ab) = [\alpha(ab)]\beta - \alpha[(ab)\beta] = [(\alpha a)b]\beta - \alpha[a(b\beta)] = 0 = \nu(a)\nu(b),$$

d. h. ν ist ein Homomorphismus.[3])

Der Beweis unseres Satzes ergibt sich jetzt schon leicht. Wir brauchen nämlich zu zeigen, daß aus den Bedingungen des Satzes folgt, daß jedes Paar α, β von Doppelhomothetismen befreundet ist. Da aber R' ein charakteristischer Unterring von R ist, induzieren α und β je einen Doppelhomothetismus von R' (nach [2], Satz 1). Da R' ein einziges Holomorph hat, muß $\nu a = 0$ für $a \in R'$ sein (ν ist definiert wie in (2)). Da endlich ν nach 2° ein Homomorphismus von R in N und nach dem eben Bemerkten $R' \subseteq \operatorname{Ker} \nu$ ist, haben wir $\nu a = 0$ für sämtliche $a \in R$. Dies bedeutet aber, daß α und β befreundet sind, was zu beweisen war.

Aus diesem Satz folgt, daß eine jede der Bedingungen I—III hinreichend ist.

Gilt I, so genügt es $R' = 0$ zu wählen, denn, wie schon bemerkt, R^2 im Kern jedes Homomorphismus von R in N enthalten ist.

Gilt II, so ist (1) bei $R' = 0$ trivialerweise erfüllt.

Gilt III, so können wir $R' = N$ setzen. In der Tat gilt in diesem Falle

$$\operatorname{Hom}(R^+/(N, R^2)^+, N^+) = \operatorname{Hom}(R^+/R^+, N^+) = 0.$$

Dies zeigt sogar, daß in III statt $R = R^2 \dotplus N$ schon die schwächere Annahme $R = (R^2, N)$ ausreicht.

Aus dem Satz folgt auch, daß R ein einziges Holomorph hat, wenn dies für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R gilt. $\mathfrak{p}$ ist nämlich charakteristisch (RÉDEI [2]) und $R/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei.

Es genügt selbstverständlich auch, wenn R überhaupt keinen nichttrivialen Homomorphismus in N hat (wir können dann wieder $R' = 0$ wählen).

Ähnlich zum obigen Satze läßt sich zeigen:

Hat der Ring R ein Ideal $\mathfrak{r}$ so, daß weder $\mathfrak{r}$, noch $R/\mathfrak{r}$ einen nichttrivialen Homomorphismus in N haben, so hat R ein einziges Holomorph.

Ist nämlich $\mathfrak{r}$ ein solches Ideal, so bildet ein Homomorphismus $\varphi: R \to N$ das Ideal $\mathfrak{r}$ in N, also in 0 ab; dann ist aber φ eigentlich ein Homomorphismus von $R/\mathfrak{r}$ in N, d. h. der Zerohomomorphismus.

---

[3]) Diese (und teilweise auch die erste) Bemerkung beruht eigentlich auf der Tatsache, daß unter den Abbildungen von R in einen Zeroring die Homomorphismen und Homothetismen zusammenfallen.

2. Als notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit des Holomorphs ist nur folgendes bekannt:

V. Hat R einen Zeroring mit nichtkommutativem Endomorphismenring zum direkten Summand, so hat R mehrere Holomorphe (WEINERT—EILHAUER [4]).

Als Spezialfall von V (und IV) entsteht aber die Tatsache, daß ein Zeroring dann und nur dann ein einziges Holomorph hat, wenn sein Endomorphismenring kommutativ ist (RÉDEI [2]). Mit Benutzung dieses Spezialfalles erweist sich V selbst als ein Spezialfall der folgenden Tatsache:

Hat R ein einziges Holomorph, so gilt dies für jeden direkten Summanden von R.

Ist nämlich $R = R_1 \dotplus R_2$, und sind σ, τ zwei nichtbefreundete Doppelhomothetismen von R_1, so sind σ', τ', die wir durch

$$\sigma'(a_1+a_2) = \sigma a_1, \quad (a_1+a_2)\sigma' = a_1\sigma,$$

$$\tau'(a_1+a_2) = \tau a_1, \quad (a_1+a_2)\tau' = a_1\tau \quad (a_1 \in R_1,\, a_2 \in R_2)$$

definieren, nichtbefreundete Doppelhomothetismen von R.

Jetzt möchten wir uns mit der Frage beschäftigen, wann ein direkter Summand ein charakteristischer Unterring ist. Die Antwort wird durch den folgenden Satz gegeben:

Sei $R = R_1 \dotplus R_2$ eine direkte Summe und bezeichne N_2 den Annullator von R_2. Damit R_1 ein charakteristischer Unterring in R ist, ist es notwendig und hinreichend, daß R_1 keinen nichttrivialen Homomorphismus in N_2 hat (d.h. $\mathrm{Hom}(R_1^+/(R_1^2)^+, N_2^+)=0$ gilt).

Ist nämlich ν_1 ein nichttrivialer Homomorphismus von R_1 in N_2, so ist die durch

$$\nu(a_1+a_2) = \nu_1 a_1$$

definierte Abbildung ν ein Homomorphismus von R in seinen Annullator N. Nach der Bemerkung 1° ist dann die durch (1) definierte Doppelabbildung ν^* ein Doppelhomothetismus von R, der dabei R_1 nicht in sich selbst abbildet. Somit ist R_1 in diesem Fall nicht charakteristisch.

Gibt es dagegen keinen nichttrivialen Homomorphismus ν_1, so sei σ ein beliebiger Doppelhomothetismus von R und $a \in R_1$. Um zu beweisen, daß R_1 charakteristisch ist, genügt es zu zeigen, daß $\sigma a \in R_1$ gilt (für $a\sigma$ läßt sich das ebenso tun.) Wir setzen $\sigma a = a' + a''$ $(a' \in R_1,\, a'' \in R_2)$ und $x\sigma = x' + x''$ $(x' \in R_1,\, x'' \in R_2)$ für ein beliebiges $x \in R_2$. Dann gilt

$$a''x = (\sigma a)x = \sigma(ax) = 0, \quad xa'' = x(\sigma a) = (x\sigma)a = x'a \in R_1,$$

also auch $xa''=0$. Somit ist $a \to a''$ ein Homothetismus von R_1 in N_2, dann aber auch ein Homomorphismus (siehe Fußnote [3]). Nach der Annahme muß dann $a''=0$, $\sigma a = a' \in R_1$ sein, was zu beweisen war.

Aus dem Bewiesenen folgt:

Hat der Ring R ein einziges Holomorph, so ist jeder direkte Summand in R charakteristisch.

In der Tat, sei $R = R_1 \dotplus R_2$. Ist nun R_1 nicht charakteristisch (also $R_1, R_2 \neq 0$), so sei ν^* der im ersten Teil des vorigen Beweises definierte Doppelhomothetismus. Der Doppelhomothetismus σ sei durch

$$\sigma(a_1 + a_2) = (a_1 + a_2)\sigma = a_1 \qquad (a_1 \in R_1, a_2 \in R_2)$$

definiert. Dann sind σ und ν^* nicht befreundet, denn für ein $a \in R_1$ mit $a\nu^* \neq 0$ gilt

$$(\sigma a)\nu^* = a\nu^*, \quad \sigma(a\nu^*) = 0$$

und somit hat R mehrere Holomorphe, was zu beweisen war.

Über das Holomorph einer direkten Summe können wir folgendes sagen:

Sind die Unterringe R_1 und R_2 charakteristisch in der direkten Summe $R = R_1 \dotplus R_2$, so entstehen sämtliche Holomorphe von R in der Form $H = H_1 \dotplus H_2$, wo H_i ein beliebiges Holomorph von R_i ist $(i = 1, 2)$. Wenn also R_1, R_2 je ein Holomorph haben, so gilt dies auch für R.

Seien nämlich σ_1, σ_2 Doppelhomothetismen von R_1 bzw. R_2. Die Doppelabbildungen von R

$$\begin{aligned} \sigma_1'(a_1 + a_2) &= \sigma_1 a_1, \quad (a_1 + a_2)\sigma_1' = a_1\sigma_1 \\ \sigma_2'(a_1 + a_2) &= \sigma_2 a_2, \quad (a_1 + a_2)\sigma_2' = a_2\sigma_2 \end{aligned} \qquad (a_1 \in R_1, a_2 \in R_2)$$

sind Doppelhomothetismen und für einen maximalen Doppelhomothetismenring D_i $(i = 1, 2)$ von R_i ist die Abbildung $\sigma_i \to \sigma_i'$ $(\sigma_i \in D_i)$ ein Isomorphismus auf einen Doppelhomothetismenring D_i' von R. σ_1' und σ_2' sind immer befreundet, denn

$$(3) \qquad \sigma_1'(a\sigma_2') = (\sigma_1' a)\sigma_2' = \sigma_2'(a\sigma_1') = (\sigma_2' a)\sigma_1' = 0$$

ist und ebenso gilt

$$(4) \qquad \sigma_1'\sigma_2' = \sigma_2'\sigma_1' = 0.$$

(3) bedeutet, daß es für beliebige maximale Doppelhomothetismenringe D_1, D_2 einen maximalen Doppelhomothetismenring D von R gibt, der D_1' und D_2' enthält. Ist aber σ ein beliebiger Doppelhomothetismus von R, so induziert er je einen Doppelhomothetismus σ_1, σ_2 von R_1 bzw. R_2 und es gilt offenbar $\sigma = \sigma_1' + \sigma_2'$, d. h. D_1' und D_2' erzeugen D (es ist nämlich klar, daß D_i' sämtliche Doppelhomothetismen aus D enthält, die R in R_i abbilden, denn σ_i' und τ_i' sind offensichtlich dann und nur dann befreundet, wenn dies für σ_i und τ_i gilt). Ferner gilt wegen (4) und $D_1' \cap D_2' = 0$ auch $D = D_1' \dotplus D_2'$.

Umgekehrt, sei jetzt D ein maximaler Doppelhomothetismenring von R und sei $\sigma \in D$. Wie schon gesagt, ist σ in der Form $\sigma = \sigma_1' + \sigma_2'$ darstellbar, wo σ_i' den Ring R in R_i abbildet. Da σ und $\tau = \tau_1' + \tau_2' (\in D)$ dann und nur dann befreundet sind, wenn σ_1' mit τ_1', σ_2' mit τ_2' befreundet ist, so gilt gleichzeitig mit $\sigma \in D$ auch $\sigma_1', \sigma_2' \in D$. Es bezeichne D_i' die Menge derjenigen Elemente von D, die R in R_i abbilden. Wäre der zu D_i' gehörige Doppelhomothetismenring D_i von R_i nicht maximal, so könnte man einen Doppelhomothetismus ϱ_i von R_i finden, der mit sämtlichen Doppelhomothetismen aus D_i befreundet ist. Dann ist aber ϱ_i' mit sämtlichen Doppelhomothetismen aus D_i', also auch aus D befreundet und D wäre kein maximaler Ring. Somit sind D_1, D_2 maximale Doppelhomothetismenringe von R_1 bzw. R_2 und dann, wie schon bewiesen, gilt $D = D_1' \dotplus D_2'$.

Das Holomorph $H = D \mathbin{\boldsymbol{+}} R$ besteht aus den Elementen (σ, a) mit den Kompositionsregeln (mit Benutzung von $\sigma_i' a = \sigma_i' a_i$ usw.)

$$(\sigma, a)+(\tau, b) = (\sigma+\tau, a+b) = (\sigma_1'+\tau_1', a_1+b_1)+(\sigma_2'+\tau_2', a_2+b_2),$$

$$(\sigma, a)(\tau, b) = (\sigma\tau, \sigma b+a\tau+ab) = (\sigma_1'\tau_1'+\sigma_2'\tau_2', \sigma_1' b+\sigma_2' b+a\tau_1'+a\tau_2'+$$

$$+a_1 b_1+a_2 b_2) = (\sigma_1'\tau_1', \sigma_1' b_1+a_1\tau_1'+a_1 b_1)+(\sigma_2'\tau_2', \sigma_2' b_2+a_2\tau_2'+a_2 b_2)$$

und so gilt in der Tat $H = H_1 \dotplus H_2$.

Literaturverzeichnis

[1] L. van Leeuwen, On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, ser. A, **61** (1958), 162–169.

[2] L. Rédei, Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, *Acta Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 169–195.

[3] J. Szendrei, Zur Holomorphentheorie der Ringe, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955/6), 450–454.

[4] H. J. Weinert–R. Eilhauer, Zur Holomorphentheorie der Ringe, *Acta Sci. Math.* **24**, (1963), 28–33.

(Eingegangen am 9. August 1963)